CAPÍTULO

1

Métodos de Integración

2.2 Integración por cambio de variable

Una vez presentado el concepto de diferencial de una función, podemos introducir el método de integración llamado cambio de variable. Lo haremos primeramente para integrales indefinidas y posteriormente para integrales definidas.

2.2.1 Cambio de variable en integrales indefinidas

La regla de la Cadena para derivar funciones compuestas establece que si $u = f(x)$ & $y = g(u) = g[f(x)]$, entonces:

$$\frac{d}{dx}(g[f(x)]) = g'[f(x)]f'(x). \tag{2.1}$$

La diferencial correspondiente es

$$\mathrm{d}(g[f(x)]) = g'[f(x)]f'(x)\ \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Tomando en cuenta que $u = f(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = f'(x)\ \mathrm{d}x$, entonces:

$$\mathrm{d}[g(u)] = g'(u)\ \mathrm{d}u. \tag{2.3}$$

Como ya hemos señalado, toda fórmula de derivación se convierte en una fórmula de integración, y la que corresponde a (2.1) o su equivalente (2.2) es:

$$\int g'[f(x)]f'(x)\ \mathrm{d}x = g[f(x)] + C. \tag{2.4}$$

También podemos decir de manera más simple que

$$\int g'(u)\ \mathrm{d}u = g(u) + C. \tag{2.5}$$

canek.azc.uam.mx: 20/ 5/ 2015/ 584

Podríamos combinar (2.4) y (2.5) de manera que se pueda apreciar lo que se hace en este método:

$$\underbrace{\int g'[f(x)]f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = f(x); \\ \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int g'(u)\,\mathrm{d}u = g(u) + C = g[f(x)] + C. \tag{2.6}$$

Las igualdades (2.6) describen esquemáticamente este método de sustitución o cambio de variable: en la integral original se debe encontrar una función $u = f(x)$ y su diferencial $\mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$, de manera que, al sustituir a $f(x)$ por u y a $f'(x)\,\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}u$, el integrando se abrevia y simplifica; cuando se calcula la integral indefinida obtenemos como resultado una función de u, donde terminamos escribiendo ahora $f(x)$ en lugar de u para regresar a las variables originales. Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.1 *Calcular la integral* $\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Observando el integrando, se puede ver que si escribimos $u = x^2 + 1$, entonces $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, que es el factor que multiplica a $(x^2+1)^{10}$, así que la integral con este cambio de variable queda:

$$\underbrace{\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2+1; \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int u^{10}\,\mathrm{d}u.$$

Esta nueva integral en la variable u es muy fácil de calcular:

$$\int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{11}}{11} + C.$$

Ahora, para terminar el proceso escribimos x^2+1 en lugar de u en el último resultado para concluir que

$$\int (x^2+1)^{10} 2x\,\mathrm{d}x = \int u^{10}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{11}}{11} + C = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.2 *Calcular la integral* $\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x$.

▼ En este caso, la derivada de la expresión entre paréntesis es el numerador del integrando, por lo que podemos hacer el siguiente cambio de variable: $u = x^3 + 5x - 7$ & $\mathrm{d}u = (3x^2+5)\,\mathrm{d}x$. Así la integral se simplifica:

$$\underbrace{\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^3+5x-7; \\ \mathrm{d}u = (3x^2+5)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^4} = \int u^{-4}\,\mathrm{d}u;$$

Esta última integral se calcula fácilmente y una vez hecho esto regresamos a la variable original poniendo $x^3 + 5x - 7$ en lugar de u:

$$\int u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{(x^3+5x-7)^{-3}}{-3} + C = \frac{-1}{3(x^3+5x-7)^3} + C,$$

de modo que

$$\int \frac{3x^2+5}{(x^3+5x-7)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{3(x^3+5x-7)^3}+C.$$

□

Para utilizar con éxito el método que estamos viendo, se debe identificar una parte del integrando como la función que llamaremos u, y además un factor del integrando deberá ser su diferencial, $\mathrm{d}u$. En algunos casos a esta diferencial puede faltarle un factor constante, el cual podemos operar gracias a la linealidad de la integral.

Ejemplo 2.2.3 *Calcular la integral* $\int \frac{2x^3+3x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}}\,\mathrm{d}x$.

▼ En vista de los ejemplos anteriores, parece buena idea tomar como u a la expresión dentro del radical: $u = x^4+3x^2-2$. Pero entonces su diferencial es $\mathrm{d}u = (4x^3+6x)\,\mathrm{d}x$ y no lo que tenemos en el numerador del integrando; sin embargo podemos notar que si factorizamos resulta $\mathrm{d}u = 2(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x$, de donde $(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$, así que podemos sustituir y obtener:

$$\underbrace{\int \frac{(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}}}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^4+3x^2-2; \\ \frac{u}{2} = (2x^3+3x)\,dx. \end{array}}} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)+C = \sqrt{u}+C.$$

Ahora, al retomar la variable original, resulta:

$$\int \frac{(2x^3+3x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+3x^2-2}} = \sqrt{x^4+3x^2-2}+C.$$

□

Ejemplo 2.2.4 *Calcular la integral* $\int [x^3+3x^2-6x]^4(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$.

▼ Usando la sustitución $u = x^3+3x^2-6x$:

$$\mathrm{d}u = (3x^2+6x-6)\,\mathrm{d}x = 3(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x.$$

En el integrando no aparece la forma $3(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$ sino solamente $(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$; si escribimos $\frac{\mathrm{d}u}{3} = (x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x$, con lo cual se resuelve la integral pedida como sigue:

$$\underbrace{\int [x^3+3x^2-6x]^4(x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^3+3x^2-6x; \\ \frac{\mathrm{d}u}{3} = (x^2+2x-2)\,\mathrm{d}x. \end{array}}} = \int u^4\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\frac{u^5}{5}+C =$$

$$= \frac{1}{15}[x^3+3x^2-6x]^5+C.$$

□

Ejemplo 2.2.5 *Calcular la integral* $\int [3(x+2)^2-7(x+2)+5]\,\mathrm{d}x$.

▼ Aunque sería fácil evaluar la integral, después de realizar unas cuantas operaciones algebraicas, es aún más fácil hacer la sustitución $u = x + 2$ & $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, con la cual obtenemos:

$$\underbrace{\int [3(x+2)^2 - 7(x+2) + 5]\ \mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x+2; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x. \end{array}}} = \int [3u^2 - 7u + 5]\ \mathrm{d}u = u^3 - \frac{7}{2}u^2 + 5u + C =$$

$$= (x+2)^3 - \frac{7}{2}(x+2)^2 + 5(x+2) + C.$$

□

Ejemplo 2.2.6 *Calcular la integral* $\int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(6t - 9)\ \mathrm{d}t$.

▼ Al sustituir $u = t^2 - 3t + 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = (2t - 3)\ \mathrm{d}t$, que no coincide con el factor que hay en el integrando $(6t - 9)\ \mathrm{d}t$; sin embargo podemos factorizar este último y obtener

$$(6t - 9)\ \mathrm{d}t = 3(2t - 3)\ \mathrm{d}t = 3\ \mathrm{d}u,$$

con lo que la integral se resuelve como sigue:

$$\underbrace{\int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(6t - 9)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{l} u = t^2 - 3t + 2; \\ \mathrm{d}u = (2t - 3)\ \mathrm{d}t. \end{array}}} = \int \sqrt{t^2 - 3t + 2}\,(3)(2t - 3)\ \mathrm{d}t = \int \sqrt{u} \cdot 3\ \mathrm{d}u =$$

$$= 3 \int u^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u = 3\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 3\left(\frac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}} + C = 2(t^2 - 3t + 2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

□

En los ejemplos anteriores cabe mencionar que se factoriza la diferencial $\mathrm{d}u$ para después, por linealidad de la integral, poner el factor constante que la multiplica fuera de la integral. De ninguna manera se puede poner fuera de la integral un factor que involucre la variable de integración. Por ejemplo sería completamente equivocado hacer lo siguiente:

$$\underbrace{\int (x^2 + 2x)^3 (2x^2 + 2x)\ \mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 + 2x; \\ \mathrm{d}u = (2x + 2)\ \mathrm{d}x. \end{array}}} = \int u^3 x\ \mathrm{d}u \stackrel{?}{=} x \int u^3\ \mathrm{d}u.$$

La primera igualdad es correcta (aunque no muy útil), pero la segunda es un error.

Ejemplo 2.2.7 *Calcular la integral* $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\ \mathrm{d}x$.

▼ Tomando en cuenta que la derivada de una función exponencial resulta en términos de ella misma, inferimos que un cambio de variable adecuado podría ser: $u = e^{2x} + 1$.

Para $u = e^{2x} + 1$ se tiene que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^{2x}(2)$ & $\mathrm{d}u = 2e^{2x}\ \mathrm{d}x$, de donde $e^{2x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}u$. Por esta razón,

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{e^{2x}\ \mathrm{d}x}{e^{2x} + 1} = \int \frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x} + 1| + C = \ln(e^{2x} + 1)^{\frac{1}{2}} + C = \ln\sqrt{e^{2x} + 1} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3}}\, \mathrm{d}x$.

▼ Recordando que la derivada de la función seno es la función coseno, podemos considerar como un cambio de variable adecuado: $y = \operatorname{sen} 4x + 3$.

Para $y = \operatorname{sen} 4x + 3$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\cos 4x)(4)$ & $\mathrm{d}y = 4\cos 4x\, \mathrm{d}x$, de donde $\dfrac{1}{4}\, \mathrm{d}y = \cos 4x\, \mathrm{d}x$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\cos 4x}{\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos 4x\, \mathrm{d}x}{(\operatorname{sen} 4x + 3)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{1}{4}\, \mathrm{d}y}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\int y^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + C = \frac{1}{4}(2)\sqrt{y} + C = \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{sen} 4x + 3} + C.$$

□

Ejemplo 2.2.9 *Calcular la integral* $\displaystyle\int (3\cos 2x + 4 \operatorname{sen} 2x)\, \mathrm{d}x$.

▼ Aplicando el cambio de variable $\theta = 2x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 2$ & $\mathrm{d}\theta = 2\, \mathrm{d}x$; de donde $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, \mathrm{d}\theta$. Por esto,

$$\int (3\cos 2x + 4\operatorname{sen} 2x)\, \mathrm{d}x = \int (3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta)\frac{1}{2}\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int (3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta)\, \mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\left[3\int \cos\theta\, \mathrm{d}\theta + 4\int \operatorname{sen}\theta\, \mathrm{d}\theta\right] = \frac{1}{2}[3(\operatorname{sen}\theta) + 4(-\cos\theta)] + C =$$
$$= = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.2.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\, \mathrm{d}x$.

▼ Primero separamos en dos integrales:

$$\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\, \mathrm{d}x = \int \frac{\ln^3 x}{x}\, \mathrm{d}x - \int \frac{2}{x}\, \mathrm{d}x = \int (\ln x)^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Luego consideramos un cambio de variable: $w = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}w = \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. Entonces:

$$\int \frac{\ln^3 x - 2}{x}\, \mathrm{d}x = \int (\ln x)^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int w^3\, \mathrm{d}w - 2\int \mathrm{d}w = \frac{w^4}{4} - 2w + C =$$
$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 - 2(\ln x) + C = \frac{1}{4}\ln^4 x - \ln x^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{\tan 2x} + 3}{\cos^2 2x}\, \mathrm{d}x$.

▼ Primero consideraremos que $\dfrac{1}{\cos^2 2x} = \left(\dfrac{1}{\cos 2x}\right)^2 = \sec^2 2x$.

Luego aplicamos el cambio de variable $u = \tan 2x$.

Con $u = \tan 2x$, $\mathrm{d}u = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$ & $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}u = \sec^2 2x\,\mathrm{d}x$. Por lo que,

$$\int \frac{e^{\tan 2x}+3}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int \left[e^{\tan 2x}+3\right]\frac{1}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x = \int [e^{\tan 2x}+3]\sec^2 2x\,\mathrm{d}x = \int (e^u+3)\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int (e^u+3)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}[e^u+3u]+C = \frac{1}{2}e^{\tan 2x}+\frac{3}{2}\tan 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.2.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x\arctan x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si consideramos el cambio de variable $y = \arctan x^2$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+(x^2)^2}(2x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} \;\Rightarrow\; \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y.$$

Luego entonces,

$$\int \frac{x\arctan x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\arctan x^2\right)\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int y\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int y\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\right) + C = \frac{1}{4}\left(\arctan x^2\right)^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.13 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^x \operatorname{arcsen} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $t = \operatorname{arcsen} e^x$:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{d}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arcsen} e^x) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t = \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

Luego,

$$\int \frac{e^x\operatorname{arcsen} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int (\operatorname{arcsen} e^x)\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} e^x)^2 + C.$$

□

Ejemplo 2.2.14 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}+2x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

▼

$$\int \frac{e^{\arctan x}+2x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= \int e^{\arctan x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) + \int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$
$$= e^{\arctan x} + \ln\left(1+x^2\right) + \arctan x + C.$$

□

A continuación, aplicaremos cambios de variables para calcular las integrales de las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante.

También vamos a calcular integrales cuyos resultados son las funciones arcoseno, arcotangente y arcosecante.

- Demostrar $\displaystyle\int \tan\theta\, d\theta = -\ln(\cos\theta) + C = \ln(\sec\theta) + C$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \tan\theta\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta$, si usamos $x = \cos\theta \;\Rightarrow\; dx = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$, entonces:

$$\int \tan\theta\, d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\theta = -\int \frac{-\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos\theta} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x + C = -\ln(\cos\theta) + C =$$
$$= (-1)\ln(\cos\theta) + C = \ln(\cos\theta)^{-1} + C = \ln\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) + C = \ln(\sec\theta) + C.$$

Por lo tanto:

$$\int \tan\theta\, d\theta = -\ln(\cos\theta) + C = \ln(\sec\theta) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \cot\theta\, d\theta = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C = -\ln\csc\theta + C$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \cot\theta\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$, si usamos ahora $x = \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; dx = \cos\theta\, d\theta$,

$$\int \cot\theta\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C =$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\csc\theta}\right) + C = \ln(1) - \ln(\csc\theta) = -\ln\csc\theta + C.$$

Por lo tanto:

$$\int \cot\theta\, d\theta = \ln(\operatorname{sen}\theta) + C = -\ln\csc\theta + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \sec\theta\, d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C$.

▼ Primero, multiplicamos y dividimos al integrando por $(\sec\theta + \tan\theta)$.

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{(\sec\theta)(\sec\theta + \tan\theta)}{(\sec\theta + \tan\theta)}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta.$$

Luego aplicamos el cambio de variable $u = \sec\theta + \tan\theta$.

$$u = \sec\theta + \tan\theta \;\Rightarrow\; \frac{du}{d\theta} = \sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta \;\&\; du = (\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta)\, d\theta.$$

Entonces:

$$\int \sec\theta\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + C = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \sec\theta\, d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \csc\theta\, d\theta = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C$.

▼ Primero, multiplicamos y dividimos al integrando por $(\csc\theta - \cot\theta)$.

$$\int \csc\theta\, d\theta = \int \frac{(\csc\theta)(\csc\theta - \cot\theta)}{(\csc\theta - \cot\theta)}\, d\theta = \int \frac{\csc^2\theta - \csc\theta\cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}\, d\theta.$$

Luego aplicamos el cambio de variable $y = \csc\theta - \cot\theta$:

$$y = \csc\theta - \cot\theta \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -\csc\theta\cdot\cot\theta - (-\csc^2\theta) = -\csc\theta\cdot\cot\theta + \csc^2\theta \;\&\; dy = (\csc^2\theta - \csc\theta\cdot\cot\theta)\,d\theta.$$

Y ahora:

$$\int \csc\theta\,d\theta = \int \frac{\csc^2\theta - \csc\theta\cdot\cot\theta}{\csc\theta - \cot\theta}\,d\theta = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \csc\theta\,d\theta = \ln(\csc\theta - \cot\theta) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$; con $a > 0$.

▼ Considerando que $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$, optamos por el desarrollo siguiente.

Ya que,

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)} = \sqrt{a^2}\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} = |a|\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} = a\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int \frac{du}{a\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}}.$$

Ahora aplicamos un cambio de variable, donde despejamos a la variable original u en términos de la nueva variable x

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \;\&\; du = a\,dx.$$

Luego,

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{a}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= \operatorname{arcsen} x + C = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a} + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$, decidimos el siguiente desarrollo:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \int \frac{du}{a^2\left(1 + \frac{u^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{a}\right)^2}.$$

Aplicamos ahora un cambio de variable, donde (de nuevo) despejamos a la variable original u en función de la nueva variable x

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \;\&\; \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\dfrac{u}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\arctan x + C = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

- Demostrar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$; con $a > 0$.

▼ Considerando $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arcsec} x + C$, optamos por el siguiente procedimiento:

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{u^2}{a^2}-1\right)} = \sqrt{a^2}\sqrt{\frac{u^2}{a^2}-1} = |a|\sqrt{\frac{u^2}{a^2}-1} = a\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2-1};$$

entonces,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{ua\sqrt{\left(\dfrac{u}{a}\right)^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\left(\dfrac{u}{a}\right)^2-1}}.$$

Aplicamos de nuevo el mismo cambio de variable y el mismo procedimiento que en las dos últimas demostraciones.

$$\frac{u}{a} = x \;\Rightarrow\; u = ax \;\&\; \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x.$$

Luego,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\left(\dfrac{u}{a}\right)^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,\mathrm{d}x}{ax\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arcsec} x + C = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

Observación. En las tres últimas demostraciones, no procedimos como en los ejemplos anteriores. Al realizar el cambio de variable $x = \dfrac{u}{a}$ no procedimos al cálculo de la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ sino que nuestro procedimiento fue diferente: despejamos la variable original u en términos de la nueva variable x, para luego calcular la derivada $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ y la diferencial $\mathrm{d}u$. Finalmente, después de las sustituciones pertinentes, calculamos la integral. Este procedimiento nos permite calcular integrales que de la otra manera no sería posible. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.2.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos el cambio de variable $\sqrt[3]{x-1} = y$, de donde despejamos la variable original x en función de la nueva variable y. Esto es,

$$\sqrt[3]{x-1} = y \;\Rightarrow\; x-1 = y^3 \;\Rightarrow\; x = y^3+1.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 3y^2$ & la diferencial $\mathrm{d}x = 3y^2\,\mathrm{d}y$. Luego sustituimos y calculamos,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt[3]{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int (y^3+1)y\left(3y^2\,\mathrm{d}y\right) = 3\int\left(y^3+1\right)y^3\,\mathrm{d}y = \\ &= 3\int\left(y^6+y^3\right)\mathrm{d}y = 3\left[\frac{y^7}{7}+\frac{y^4}{4}\right]+C = \\ &= \frac{3}{7}y^7+\frac{3}{4}y^4+C = \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+C = \\ &= \frac{3}{7}(x-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}+C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.16 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando el cambio de variable $\sqrt{x-3} = w$, despejamos la variable original x en función de la nueva variable w. Esto es,

$$\sqrt{x-3} = w \;\Rightarrow\; x-3 = w^2 \;\Rightarrow\; x = w^2+3.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} = 2w$ & la diferencial $\mathrm{d}x = 2w\,\mathrm{d}w$. Luego sustituimos y calculamos,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x &= \int\left(w^2+3\right)^2 w(2w\,\mathrm{d}w) = 2\int\left(w^4+6w^2+9\right)w^2\,\mathrm{d}w = \\ &= 2\int\left(w^6+6w^4+9w^2\right)\mathrm{d}w = 2\left[\frac{w^7}{7}+\frac{6}{5}w^5+\frac{9}{3}w^3\right]+C = \\ &= \frac{2}{7}\left(\sqrt{x-3}\right)^7+\frac{12}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5+6\left(\sqrt{x-3}\right)^3+C = \\ &= \frac{2}{7}(x-3)^{\frac{7}{2}}+\frac{12}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}}+6(x-3)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.17 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$.

▼ Aplicamos el cambio de variable $\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = u$, de donde despejamos la variable original x en función de la nueva variable u. Esto es,

$$\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = u \;\Rightarrow\; 2+x^{\frac{2}{3}} = u^4 \;\Rightarrow\; x^{\frac{2}{3}} = u^4-2 \;\Rightarrow\; x^2 = \left(u^4-2\right)^3 \;\Rightarrow\; x = \left(u^4-2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}$ & la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{3}{2}\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}\left(4u^3\right) = 6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = 6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3\,\mathrm{d}u.$$

Luego sustituimos y calculamos.

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{1}{3}}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x &= \int \left[\left(u^4-2\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}(u)6\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}u^3\,\mathrm{d}u =\\ &= \int \left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}6u^4\left(u^4-2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = 6\int\left(u^4-2\right)u^4\,\mathrm{d}u =\\ &= 6\int\left(u^8-2u^4\right)\mathrm{d}u = 6\left[\frac{1}{9}u^9-\frac{2}{5}u^5\right]+C =\\ &= \frac{2}{3}\left[\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^9-\frac{12}{5}\left[\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5+C =\\ &= \frac{2}{3}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}-\frac{12}{5}\left(2+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{4}}+C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2.18 *Calcular la integral* $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Consideramos el cambio de variable $\sqrt{1-x^2}=t$, de donde despejamos la variable original (x) en términos de la nueva variable t. Esto es,

$$\sqrt{1-x^2}=t \;\Rightarrow\; 1-x^2=t^2 \;\Rightarrow\; x^2=1-t^2 \;\Rightarrow\; x=\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1-t^2}.$$

Ahora calculamos la derivada $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ & la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2t)=\frac{-t}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \;\&\; \mathrm{d}x=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Al sustituir, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 t\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = -\int\frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{\sqrt{1-t^2}}t^2\,\mathrm{d}t =\\ &= -\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 t^2\,\mathrm{d}t = -\int\left(1-t^2\right)t^2\,\mathrm{d}t =\\ &= -\int\left(t^2-t^4\right)\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]+C =\\ &= \frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5-\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3+C.\end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.2.1 *Cambio de variable.* *Soluciones en la página 19*
Aplicando la técnica integración por cambio de variable, calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (x-1)^9\,\mathrm{d}x$;
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^9}}$;
3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x-1}$;
4. $\int (x^2+1)^8 2x\,\mathrm{d}x$;
5. $\int \dfrac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;
6. $\int \dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}\,\mathrm{d}x$;

7. $\displaystyle\int (e^x+2)^5 e^x \,\mathrm{d}x$;

8. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{(\operatorname{sen}\theta-3)^2}\,\mathrm{d}\theta$;

9. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{(\tan\theta+1)^3}}\,\mathrm{d}\theta$;

10. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x^2-x+1)^5}\,\mathrm{d}x$;

11. $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}$;

12. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$;

13. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$;

14. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,\mathrm{d}x$;

15. $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta+1}\,\mathrm{d}\theta$;

16. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

17. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$;

19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsec} x}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$;

20. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

21. $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}2\theta\,\mathrm{d}\theta$;

22. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$;

23. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$;

24. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

25. $\displaystyle\int \frac{e^x\tan e^x}{\cos^2 e^x}\,\mathrm{d}x$;

26. $\displaystyle\int \frac{e^x e^{\tan e^x}}{\cos^2 e^x}\,\mathrm{d}x$;

27. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

28. $\displaystyle\int (3x-1)^9\,\mathrm{d}x$;

29. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(5x+3)^4}}$;

30. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+5}$;

31. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

32. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

33. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}\,\mathrm{d}x$;

34. $\displaystyle\int (e^{2x}+2)^8 e^{2x}\,\mathrm{d}x$;

35. $\displaystyle\int \frac{6\cos 3\theta}{(\operatorname{sen}3\theta-2)^3}\,\mathrm{d}\theta$;

36. $\displaystyle\int \frac{4\sec^2 5\theta}{\sqrt{(\tan 5\theta+1)^3}}\,\mathrm{d}\theta$;

37. $\displaystyle\int \frac{8(x+1)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^5}$;

38. $\displaystyle\int \frac{9(x^2-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^3-3x+4}}$;

39. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

40. $\displaystyle\int \frac{\cos 2\theta+\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta-\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$;

41. $\displaystyle\int \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+x}\,\mathrm{d}x$;

42. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3\theta}{\tan 3\theta+4}\,\mathrm{d}\theta$;

43. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$;

44. $\displaystyle\int 2^{-x^2}x\,\mathrm{d}x$;

45. $\displaystyle\int \frac{\arctan 3x}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x$;

46. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^5 x}$;

47. $\displaystyle\int \frac{5\operatorname{arcsec}3x}{2x\sqrt{9x^2-1}}\,\mathrm{d}x$;

48. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x^5}$;

49. $\displaystyle\int 2^{e^x}(1+2^{e^x})^5 e^x\,\mathrm{d}x$;

50. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$;

51. $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x^2}{x}\,\mathrm{d}x$;

52. $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$;

53. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\tan e^{2x}}{\cos^2 e^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

54. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}e^{\tan e^{2x}}}{\cos^2 e^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

55. $\displaystyle\int \frac{4e^{2x}+2e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$;

56. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{1}{3}}(t^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}$;

57. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$;

58. $\displaystyle\int (3x^2+4)\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$;

59. $\displaystyle\int \frac{(t^{\frac{1}{3}}-1)^6}{t^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}t$;

60. $\displaystyle\int \frac{r^2-r}{(2r-1)^4}\,\mathrm{d}r$;

61. $\displaystyle\int \frac{t^3+6t}{(t^2+2)^3}\,\mathrm{d}t$;

62. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\,\mathrm{d}y$;

63. $\displaystyle\int \frac{2-\sqrt{w+1}}{2+\sqrt{w+1}}\,\mathrm{d}w$;

64. $\displaystyle\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x+4}}\,\mathrm{d}x$;

65. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^r k\theta\cos k\theta\;\mathrm{d}\theta$;

66. $\displaystyle\int \cos^r k\theta\operatorname{sen}k\theta\;\mathrm{d}\theta$;

67. $\displaystyle\int \tan^r k\theta \cdot \sec^2 k\theta \ d\theta$;

68. $\displaystyle\int \cot^r k\theta \cdot \csc^2 k\theta \ d\theta$;

69. $\displaystyle\int \sec^r k\theta \tan k\theta \ d\theta$;

70. $\displaystyle\int \csc^r k\theta \cdot \cot k\theta \ d\theta$.

2.2.2 Cambio de variable en integrales definidas

Para resolver integrales definidas que requieran de integración por cambio de variable se puede proceder de dos maneras, que son equivalentes. Supongamos que deseamos calcular la integral definida:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x) \ dx.$$

Esta integral se puede evaluar de las formas siguientes:

1. Calcular primero la integral indefinida $\int f[g(x)]g'(x) \ dx$ por cambio de variable, y una vez que se expresa el resultado en términos de la variable original se evalúa en los extremos de integración a, b.
2. Al hacer el cambio de variable $u = g(x)$ & $du = g'(x) \ dx$, los extremos de integración también deben cambiar, pues ahora la variable de integración es u, que va desde $g(a)$ hasta $g(b)$, así que

$$\underbrace{\int_a^b f[g(x)]g'(x) \ dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = g(x); \\ du = g'(x) \ dx. \end{array}}} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \ du.$$

Ejemplo 2.2.19 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \ dx$.

▼

1. Procediendo primero a calcular la integral indefinida:

$$\underbrace{\int (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \ dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 - 4x + 3; \\ du = (2x - 4) \ dx. \end{array}}} = \int u^2 \ du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{3} + C.$$

Continuando de esta manera, tenemos para la integral definida:

$$\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \ dx = \left[\frac{(x^2 - 4x + 3)^3}{3}\right]_2^5 = \frac{(25 - 20 + 3)^3}{3} - \frac{(4 - 8 + 3)^3}{3} =$$
$$= \frac{8^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{512 + 1}{3} = \frac{513}{3} = 171.$$

2. Si aplicamos la segunda forma:

$$\underbrace{\int_2^5 (x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4) \ dx}_{\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 - 4x + 3; \\ du = (2x - 4) \ dx; \\ u(2) = -1 \ \& \ u(5) = 8. \end{array}}} = \int_{-1}^{8} u^2 \ du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{8} = \frac{8^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 171.$$

Observe que en el segundo procedimiento al cambiar los límites de integración se hace más directa la evaluación en los extremos del intervalo.

□

Al emplear este método se debe tener cuidado con el intervalo de integración, pues la función integrando debe ser continua en dicho intervalo antes y después del cambio de variable. Para muestra veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.20 *Evaluar* $\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t$.

▼

1. Calculamos primero la integral indefinida:

$$\underbrace{\int \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u=t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u=(2t-5)\ \mathrm{d}t. \end{array}}} = \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}(t^2-5t+6)^{\frac{3}{2}} + C.$$

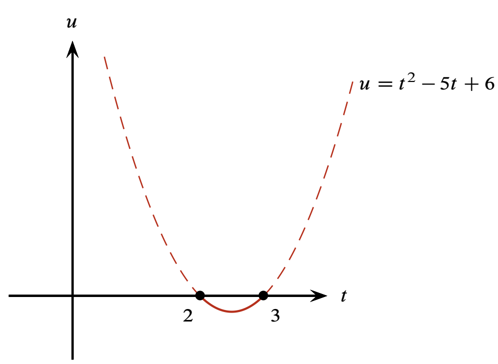
Del resultado anterior se obtiene:

$$\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{3}(t^2-5t+6)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^3 = \frac{2}{3}(3^2-5\cdot 3+6)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(2^2-5\cdot 2+6)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

2. Si calculamos la integral definida haciendo la sustitución y cambiando los extremos del intervalo de acuerdo con dicha sustitución, resulta:

$$\underbrace{\int_2^3 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u=t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u=(2t-5)\ \mathrm{d}t; \\ u(2)=0\ \&\ u(3)=0. \end{array}}} = \int_0^0 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = 0.$$

Se aprecia en esta última evaluación un poco más claramente el resultado del cálculo, sin embargo hay que enfatizar que dicho cálculo tiene un pequeño defecto: la función que hemos integrado no está definida en el intervalo abierto $(2,3)$, pues involucra la raíz cuadrada de un número negativo, como puede verse en la figura.



Si bien es posible dar sentido a lo que se calculó en este ejemplo e interpretar el resultado correctamente, no lo haremos por ahora, pues implica manipular números complejos e integración con ellos, lo cual está fuera de los objetivos de este libro.

□

Ejemplo 2.2.21 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t$.

▼ Este ejemplo es continuación del anterior: usamos el procedimiento que consiste en cambiar variables y límites de integración:

$$\underbrace{\int_3^5 \sqrt{t^2-5t+6}\,(2t-5)\ \mathrm{d}t}_{\boxed{\begin{array}{c} u=t^2-5t+6; \\ \mathrm{d}u=(2t-5)\ \mathrm{d}t; \\ u(3)=0\ \&\ u(5)=6; \end{array}}} = \int_0^6 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\bigg|_0^6 = \frac{2}{3}6^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(6)(6)^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}.$$

En este caso la función del integrando está bien definida y es continua en el intervalo de integración $[0, 6]$.

□

Ejemplo 2.2.22 *Evaluar la integral* $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x-1}{(x^2-2x)^3}\ \mathrm{d}x$.

▼ En principio, puede parecer lógico el siguiente cambio de variable:

$$\underbrace{\int_1^{10} \frac{(x-1)\ \mathrm{d}x}{(x^2-2x)^3}}_{\boxed{\begin{array}{l} u=x^2-2x; \\ \mathrm{d}u=(2x-2)\ \mathrm{d}x=2(x-1)\ \mathrm{d}x \Rightarrow \\ \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}u}{2}=(x-1)\ \mathrm{d}x; \\ u(1)=-1\ \&\ u(10)=80. \end{array}}} = \int_{-1}^{80} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{80} u^{-3}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{(-2)}\bigg|_{-1}^{80} = -\frac{1}{4}[80^{-2}-(-1)^{-2}];$$

Sin embargo, a pesar de que esto se vea correcto, el cálculo no lo es, pues el integrando original no está definido para $x = 2$, ni el de la integral con el cambio de variables para $u = 0$. El resultado no es válido.

□

Como referencia futura, enunciamos a continuación el resultado que hemos aplicado en los últimos ejemplos:

Fórmula de cambio de variable para integrales definidas

Si $g(x)$ & $g'(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ \mathrm{d}u. \tag{2.7}$$

En el entendido de que la integral del lado derecho exista.

Ejemplo 2.2.23 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\mathrm{sen}^3 x\cos x\ \mathrm{d}x$.

▼ Considerando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, procedemos de la siguiente manera.

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\operatorname{sen}^3 x \cos x \,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x; \\ x = 0 \;\Rightarrow\; y = \operatorname{sen} 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; y = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1. \end{array}}} = 4\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}y = 4\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \left[y^4\right]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1.$$

□

Ejemplo 2.2.24 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\tan 2x}\,\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$.

▼ Al realizar el cambio de variables $w = \tan 2x$:

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\tan 2x}\,\sec^2 2x\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l} w = \tan 2x \;\Rightarrow\; dw = (\sec^2 2x)2\,\mathrm{d}x; \\ x = 0 \;\Rightarrow\; w = \tan 0 = 0; \\ x = \frac{\pi}{8} \;\Rightarrow\; w = \tan\frac{\pi}{4} = 1. \end{array}}} = \int_0^1 \sqrt{w}\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_0^1 w^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\left[\frac{w^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left[w^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}[1] = \frac{1}{3}.$$

□

Ejemplo 2.2.25 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,\mathrm{d}x$.

▼ Considerando que $\ln x^3 = 3\ln x$ y que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$, procedemos de la siguiente manera:

$$\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{3\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{3\int_1^e (\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}}_{\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \\ x = 1 \;\Rightarrow\; u = \ln 1 = 0; \\ x = e \;\Rightarrow\; u = \ln e = 1. \end{array}}} = 3\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = 3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[1^2 - 0^2\right] = \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}.$$

□

Ejemplo 2.2.26 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$.

▼ Aquí conviene eliminar $\sqrt{x}$ mediante un cambio de variable y expresar x en términos de la nueva variable:

$$\underbrace{\int_4^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{x}=u \Rightarrow x=u^2;\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=2u \Rightarrow \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u;\\ x=4 \Rightarrow u=\sqrt{4}=2;\\ x=9 \Rightarrow u=\sqrt{9}=3.\end{array}}} = \int_2^3 \frac{u-1}{u+1}(2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_2^3 \frac{u^2-u}{u+1}\,\mathrm{d}u = 2\int_2^3\left(u-2+\frac{2}{u+1}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= 2\left[\int (u-2)\,\mathrm{d}u + 2\int\frac{\mathrm{d}u}{u+1}\right]_2^3 \stackrel{*}{=} 2\left[\frac{1}{2}(u-2)^2 + 2\ln(u+1)\right]_2^3 =$$

$$= \left[(3-2)^2 + 4\ln(3+1)\right] - \left[(2-2)^2 + 4\ln(2+1)\right] = 1 + 4\ln(4) - 4\ln(3) =$$

$$= 1 + 4\ln\left[\frac{4}{3}\right].$$

En la igualdad $\stackrel{*}{=}$ se realizó implícitamente una cambio de variable al evaluar la integral $\int (u-2)\,\mathrm{d}u$.

□

Ejemplo 2.2.27 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{(1+e^{2x})^2}$.

▼ Considerando que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+e^{2x}\right) = 2e^{2x}$, procedemos de la manera siguiente:

$$\underbrace{\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{(1+e^{2x})^2}}_{\boxed{\begin{array}{l} y=1+e^{2x} \Rightarrow \mathrm{d}y=2e^{2x}\,\mathrm{d}x;\\ x=0 \Rightarrow y=1+e^0=1+1=2;\\ x=\ln 2 \Rightarrow y=1+e^{2\ln 2}=1+e^{\ln 4}=5.\end{array}}} = \int_0^{\ln 2}\left(1+e^{2x}\right)^{-2} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_2^5 y^{-2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\int_2^5 y^{-2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}\right]_2^5 = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{2-5}{10}\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{3}{20}.$$

□

Ejemplo 2.2.28 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$.

▼ Aquí conviene considerar a $\sqrt{1+\sqrt{y}}$ como una nueva variable, es decir, $x=\sqrt{1+\sqrt{y}}$; luego expresar y como función de dicha variable para calcular $\mathrm{d}y$.

$$\underbrace{\int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y}_{\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{1+\sqrt{y}}=x \Rightarrow 1+\sqrt{y}=x^2;\\ y=(x^2-1)^2 \Rightarrow \mathrm{d}y=2(x^2-1)2x\,\mathrm{d}x;\\ y=0 \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{0}}=\sqrt{1}=1;\\ y=9 \Rightarrow x=\sqrt{1+\sqrt{9}}=\sqrt{4}=2.\end{array}}} = \int_1^2 x(x^2-1)4x\,\mathrm{d}x = 4\int_1^2 x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 4\int_1^2 (x^4-x^2)\,\mathrm{d}x = 4\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 4\left[\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)\right] =$$

$$= 4\left[\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right] = 4\left[\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right] = 4\left(\frac{93-35}{15}\right) = 4\left(\frac{58}{15}\right) = \frac{232}{15}.$$

□

Ejercicios 2.2.2 *Cambio de variable.* *Soluciones en la página 21*
Aplicando la técnica de integración por cambio de variable, calcular las siguientes integrales definidas.

1. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\tan^3 2x-1}{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_1^8 \frac{\sqrt{x^{\frac{1}{3}}-1}}{x^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_{-3}^8 \sqrt{|x|+1}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{5}{9}} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y}\,(1+\sqrt{1-y})^2}$;
6. $\displaystyle\int_0^4 \frac{r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+9}}$;
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;
8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+3\operatorname{sen} 2x}}\,\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;
10. $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x^3}}$;
11. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x\sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$;
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sec^2 3x}{1+\tan 3x}\,\mathrm{d}x$;
13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$;
14. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{\mathrm{d}x}{9+x^2}$;
15. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{4+9x^2}$;
16. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3 2\theta\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta$;
17. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{9}} \cos^4 3\theta\operatorname{sen} 3\theta\,\mathrm{d}\theta$;
18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$;
19. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{y}-1}{\sqrt{y}+1}\,\mathrm{d}y$;
20. $\displaystyle\int_3^6 \frac{2-\sqrt{w-2}}{\sqrt{w-2}}\,\mathrm{d}w$;
21. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+1}{1+\sqrt{x+4}}\,\mathrm{d}x$.

Ejercicios 2.2.1 *Cambio de variable.* *Preguntas, página 11*

1. $\dfrac{1}{10}(x-1)^{10}+C$.
2. $-\dfrac{2}{7\sqrt{(x-1)^7}}+C$.
3. $\ln|x-1|+C$.
4. $\dfrac{1}{9}\left(x^2+1\right)^9+C$.
5. $\ln\left(x^2+1\right)+C$.
6. $3\sqrt[3]{x^3+1}+C$.
7. $\dfrac{1}{6}\left(e^x+2\right)^6+C$.
8. $-\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta-3}+C$.
9. $-\dfrac{2}{\sqrt{\tan\theta+1}}+C$.
10. $-\dfrac{1}{4\left(x^2-x+1\right)^4}+C$.
11. $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2-x+1\right)^2}+C$.
12. $\ln|x^2-x+1|+C$.
13. $\ln|\operatorname{sen}\theta-\cos\theta|+C$.
14. $\ln|e^x+x|+C$.
15. $\ln|\tan\theta+1|+C$.
16. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{arcsen}x)^2+C$.
17. $\dfrac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.
18. $2\sqrt{\ln x}+C$.
19. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{arcsec}x)^2+C$.
20. $\ln|\ln x|+C$.
21. $e^{\operatorname{sen}^2\theta}+C$.
22. $\ln\left(e^x+e^{-x}\right)+C$.
23. $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+C$.
24. $e^{\arctan x}+C$.
25. $\dfrac{1}{2}\left(\tan e^x\right)^2+C$.
26. $e^{\tan e^x}+C$.
27. $\dfrac{2}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^{\frac{3}{2}}+C$.
28. $\dfrac{1}{30}(3x-1)^{10}+C$.
29. $\dfrac{-3}{5\sqrt[3]{5x+3}}+C$.
30. $\dfrac{1}{2}\ln|2x+5|+C$.
31. $-\dfrac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

32. $\ln\sqrt{x^2+1}+C$.
33. $2\sqrt[3]{2x^3+1}+C$.
34. $\dfrac{1}{18}\left(e^{2x}+2\right)^9+C$.
35. $\dfrac{-1}{(\operatorname{sen}3\theta-2)^2}+C$.
36. $\dfrac{-8}{5\sqrt{\tan 5\theta+1}}+C$.
37. $\dfrac{-1}{\left(x^2+2x+3\right)^4}+C$.
38. $\dfrac{9}{2}\sqrt[3]{\left(x^3-3x+4\right)^2}+C$.
39. $\dfrac{1}{4}\ln\left(x^4+4x^2+1\right)+C$.
40. $\dfrac{1}{2}\ln|\operatorname{sen}2\theta-\cos 2\theta|+C$.
41. $\ln\dfrac{1}{|e^{-x}+x|}+C$.
42. $\dfrac{1}{3}\ln|\tan 3\theta+4|+C$.
43. $\dfrac{1}{4}(\operatorname{arcsen}2x)^2+C$.
44. $-\dfrac{2^{-x^2}}{\ln 4}+C$.
45. $\dfrac{1}{6}(\arctan 3x)^2+C$.
46. $\dfrac{-1}{4\ln^4 x}+C$.
47. $\dfrac{5}{4}(\operatorname{arcsec}3x)^2+C$.
48. $\dfrac{1}{5}\ln|\ln x|+C$.
49. $\dfrac{1}{6\ln 2}\left(1+2^{e^x}\right)^6+C$.
50. $\ln\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}+C$.
51. $\dfrac{1}{12}\ln^6 x^2+C$.
52. $\dfrac{1}{2}e^{\arctan 2x}+C$.
53. $\dfrac{1}{4}\tan^2 e^{2x}+C$.
54. $\dfrac{1}{2}e^{\tan e^{2x}}+C$.
55. $\ln\left(1+e^{2x}\right)^2+2\arctan e^x+C$.
56. $6\left[\sqrt{t^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{t^{\frac{1}{3}}-1}}\right]+C$.
57. $\dfrac{4}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt{y}}\right)^5-\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt{y}}\right)^3+C$.
58. $\dfrac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}}+\dfrac{12}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{14}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$.
59. $\dfrac{3}{8}\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)^8+\dfrac{3}{7}\left(t^{\frac{1}{3}}-1\right)^7+C$.

60. $\dfrac{1-3(2r-1)^2}{24(2r-1)^3}+C.$

61. $-\dfrac{t^2+4}{\left(t^2+2\right)^2}+C.$

62. $\left(\sqrt{y}+1\right)^2-6\left(\sqrt{y}+1\right)+4\ln|\sqrt{y}+1|+C.$

63. $-\left(2+\sqrt{w+1}\right)^2+12\left(2+\sqrt{w+1}\right)-16\ln\left|2+\sqrt{w+1}\right|+C.$

64. $\dfrac{2}{3}\left(1+\sqrt{x+4}\right)^3-3\left(1+\sqrt{x+4}\right)^2+4\ln\left|1+\sqrt{x+4}\right|+C.$

65. $\dfrac{1}{k(r+1)}\operatorname{sen}^{r+1}k\theta+C.$

66. $\dfrac{-1}{k(r+1)}\cos^{r+1}k\theta+C.$

67. $\dfrac{1}{k(r+1)}\tan^{r+1}k\theta+C.$

68. $\dfrac{-1}{k(r+1)}\cot^{r+1}k\theta+C.$

69. $\dfrac{1}{kr}\sec^{r}k\theta+C.$

70. $\dfrac{-1}{kr}\csc^{r}k\theta+C.$

Ejercicios 2.2.2 *Cambio de variable.* *Preguntas, página 18*

1. $\dfrac{1}{4}.$
2. $-\dfrac{3}{8}.$
3. $\dfrac{16}{5}.$
4. 22.
5. $\dfrac{1}{5}.$
6. 2.
7. $\dfrac{\pi^2}{8}.$
8. $\dfrac{1}{3}.$
9. $\dfrac{\pi^2}{32}.$
10. $\dfrac{2}{3}.$
11. $\dfrac{4}{3}\left(4-\sqrt{2}\right).$
12. $\dfrac{\ln 2}{3}.$
13. $\dfrac{\pi}{6}.$
14. $\dfrac{\pi}{6}.$
15. $\dfrac{\pi}{24}.$
16. 0.
17. $\dfrac{31}{160}.$
18. $\dfrac{1}{6}.$
19. $4(\ln 3-1).$
20. 1.
21. $\dfrac{11}{3}+4\ln\left(\dfrac{4}{3}\right).$