

CAPÍTULO

1

Métodos de Integración

2.5 Integración por sustitución trigonométrica

A continuación veremos una técnica de integración, la cual se basa en utilizar funciones trigonométricas para aplicar cambios de variable que tendrán como objetivo eliminar radicales de las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ & $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde a es una constante positiva.

Consideremos aquí la notación siguiente: si f es una función con variable independiente x y además contiene al menos un radical como los siguientes:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$.
- $\sqrt{a^2 + x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 + x^2})$.
- $\sqrt{x^2 - a^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

2.5.1 Integrales $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$

Nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$. Si usamos el cambio de variable

$$x = a \operatorname{sen} \theta,$$

obtenemos con esto:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \operatorname{cos}^2 \theta} = a \operatorname{cos} \theta.$$

El cambio de variable $x = a \operatorname{sen} \theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$ convirtiéndolo en $\sqrt{a^2 - x^2} = a \operatorname{cos} \theta$.

Además, si $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces $dx = a \operatorname{cos} \theta d\theta$.

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable obtenemos:

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int f(a \operatorname{sen} \theta, a \cos \theta) a \cos \theta d\theta.$$

que es una integral donde el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} \theta$ & $\cos \theta$.

Al calcular esta última integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int f(a \operatorname{sen} \theta, a \cos \theta) a \cos \theta d\theta = G(\theta) + C.$$

Debido a que en la integral original el integrando es una función de x , el resultado debe ser expresado mediante una función $H(x)$; esto es,

$$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \int f(a \operatorname{sen} \theta, a \cos \theta) a \cos \theta d\theta = G(\theta) + C = H(x) + C.$$

Ahora bien, ¿cómo pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$?

Como en $G(\theta)$ se tienen funciones trigonométricas, para pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$ debemos considerar:

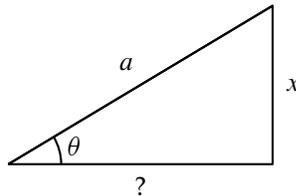
$$x = a \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a};$$

además,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar, generado de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ :

$$? = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

- Observación.

Es importante notar que para calcular integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, también puede ser aplicado el cambio de variable:

$$x = a \cos \theta.$$

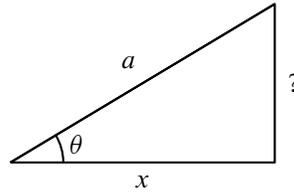
En este caso:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = a \operatorname{sen} \theta.$$

Además $dx = -a \operatorname{sen} \theta d\theta$. El procedimiento es análogo al que se expuso para $x = a \operatorname{sen} \theta$.

Aquí el triángulo rectángulo auxiliar, se genera de la forma siguiente:

$$\cos \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ :

$$? = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ejemplo 2.5.1 Calcular la integral $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

▼ Debido a que $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2-x^2}$, se propone $x = 2 \operatorname{sen} \theta$.

Si $x = 2 \operatorname{sen} \theta$, entonces $dx = 2 \cos \theta d\theta$ y además

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2 - 2^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{2^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} = \sqrt{2^2 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{2^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2 \cos \theta} (2 \cos \theta) d\theta = 2^2 \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = 4 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \\ &= 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right] + C = 2 \left[\theta - \frac{1}{2} (2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta) \right] + C = 2[\theta - \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta] + C. \end{aligned}$$

Ahora bien, para expresar este resultado como función de x debemos considerar que:

$$\begin{aligned} x = 2 \operatorname{sen} \theta &\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{2} \quad \& \quad \theta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right); \quad \text{además,} \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta &\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= 2[\theta - \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta] + C = 2 \left[\operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2} \right) \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \right] + C = \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5.2 Calcular la integral $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

▼ Tomando en cuenta la observación hecha en la teoría expuesta, podemos optar por el cambio de variable

$$x = a \cos \theta = \cos \theta.$$

Entonces

$$dx = -\operatorname{sen} \theta d\theta \quad \text{y además} \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta} = \operatorname{sen} \theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx &= \int (\cos^3 \theta)(\sin \theta)(-\cos \theta) d\theta = - \int \cos^3 \theta \sin^2 \theta d\theta = - \int \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta = \\ &= - \int \sin^2 \theta [\cos^2 \theta] \cos \theta d\theta = - \int \sin^2 \theta [1 - \sin^2 \theta] \cos \theta d\theta = - \int y^2 (1 - y^2) dy =\end{aligned}$$

Donde $y = \sin \theta$ & $dy = \cos \theta d\theta$.

$$\begin{aligned}&= \int y^2 (y^2 - 1) dy = \int (y^4 - y^2) dy = \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + C = \\ &= \frac{1}{5}(\sin \theta)^5 - \frac{1}{3}(\sin \theta)^3 + C = \frac{1}{5}(\sqrt{1-x^2})^5 - \frac{1}{3}(\sqrt{1-x^2})^3 + C =\end{aligned}$$

Ya que $\sqrt{1-x^2} = \sin \theta$.

$$\begin{aligned}&= (\sqrt{1-x^2})^3 \left[\frac{(1-x^2)}{5} - \frac{1}{3} \right] + C = \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{15} [3(1-x^2) - 5] + C = \\ &= \frac{1}{15} (\sqrt{1-x^2})^3 (-2 - 3x^2) + C = -\frac{1}{15} (\sqrt{(1-x^2)^3}) (3x^2 + 2) + C.\end{aligned}$$

□

2.5.2 Integrales $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$

Para lograr el objetivo de eliminar al radical $\sqrt{a^2 + x^2}$, convenimos en utilizar el cambio de variable

$$x = a \tan \theta.$$

Entonces:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta.$$

El cambio de variable $x = a \tan \theta$ permite eliminar al radical $\sqrt{a^2 + x^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta.$$

Además,

$$x = a \tan \theta \Rightarrow dx = a \sec^2 \theta d\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable, obtenemos:

$$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \int f(a \tan \theta, a \sec \theta) a \sec^2 \theta d\theta,$$

que es una integral en que el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\tan \theta$ y $\sec \theta$.

Al resolver esta integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

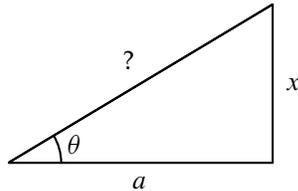
$$\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \int f(a \tan \theta, a \sec \theta) a \sec^2 \theta d\theta = G(\theta) + C$$

Para expresar este resultado en términos de la variable original x , debemos considerar que:

$$\begin{aligned}x = a \tan \theta &\Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right); \text{ además,} \\ \sqrt{a^2 + x^2} = a \sec \theta &\Rightarrow \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}.\end{aligned}$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la forma siguiente:

$$\tan \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

$$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

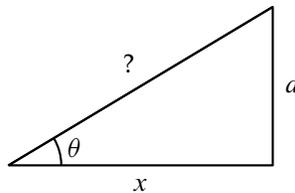
- Observación. Para calcular integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, también puede ser aplicado el cambio de variable $x = a \cot \theta$. En este caso:

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \cot^2 \theta} = \sqrt{a^2 (1 + \cot^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \csc^2 \theta} = a \csc \theta.$$

Además $dx = -a \csc^2 \theta d\theta$. El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a \tan \theta$.

En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la forma siguiente:

$$\cot \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{cateto opuesto a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

$$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ejemplo 2.5.3 Calcular la integral $\int x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx$.

▼ Debido a que $\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 3^2}$, se propone $x = 3 \tan \theta$.

Si $x = 3 \tan \theta$, entonces $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$ y además

$$\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{3^2 \tan^2 \theta + 3^2} = \sqrt{3^2 (\tan^2 \theta + 1)} = \sqrt{3^2 \sec^2 \theta} = 3 \sec \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx &= \int 3^3 \tan^3 \theta \cdot 3 \sec \theta \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta = 3^5 \int \tan^3 \theta \sec^3 \theta d\theta = \\ &= 3^5 \int \tan^2 \theta \cdot \sec^2 \theta \cdot \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta = 3^5 \int (\sec^2 \theta - 1) (\sec^2 \theta) \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta =\end{aligned}$$

Haciendo $y = \sec \theta$ & $dy = \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$.

$$\begin{aligned}&= 3^5 \int (y^2 - 1) y^2 dy = 3^5 \int (y^4 - y^2) dy = \\ &= 3^5 \left[\frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{3} y^3 \right] + C = 3^5 y^3 \left[\frac{1}{5} y^2 - \frac{1}{3} \right] + C = \\ &= 3^5 y^3 \left[\frac{3y^2 - 5}{15} \right] + C = \frac{3^5}{15} y^3 (3y^2 - 5) + C = \frac{3^4}{5} y^3 (3y^2 - 5) + C =\end{aligned}$$

Ya que $y = \sec \theta$.

$$= \frac{3^4}{5} (\sec \theta)^3 [3(\sec \theta)^2 - 5] + C =$$

Ya que $\sqrt{x^2 + 9} = 3 \sec \theta$.

$$\begin{aligned}&= \frac{3^4}{5} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} \right)^3 \left[3 \left(\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} \right)^2 - 5 \right] + C = \\ &= \frac{3^4}{5} \frac{(\sqrt{x^2 + 9})^3}{3^3} \left[\frac{1}{3} (x^2 + 9) - 5 \right] + C = \frac{3}{5} \sqrt{(x^2 + 9)^3} \left[\frac{x^2 + 9 - 15}{3} \right] = \\ &= \frac{3}{5} \sqrt{(x^2 + 9)^3} \left(\frac{x^2 - 6}{3} \right) + C = \frac{1}{5} (x^2 - 6) \sqrt{(x^2 + 9)^3} + C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5.4 Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

▼ Proponemos $x = a \tan \theta$, entonces $dx = a \sec^2 \theta d\theta$ y además:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta + a^2} = \sqrt{a^2 (\tan^2 \theta + 1)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = a \sec \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a \sec \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1 = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C_1 = \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{a} \right| + C_1 = \ln |\sqrt{x^2 + a^2} + x| - \ln |a| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.\end{aligned}$$

En particular: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.$

□

2.5.3 Integrales $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$

Como en los casos anteriores, nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ para lo cual convenimos en utilizar el cambio de variable $x = a \sec \theta$. Entonces:

$$x = a \sec \theta \Rightarrow \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta.$$

Es decir, el cambio de variable $x = a \sec \theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta.$$

Además,

$$x = a \sec \theta \Rightarrow dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable:

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \int f(a \sec \theta, a \tan \theta) a \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta,$$

que es una integral en la que el integrando está conformado con las funciones trigonométricas $\sec \theta$ y $\tan \theta$. Como en los casos anteriores, al resolver esta integral obtenemos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

$$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \int f(a \sec \theta, a \tan \theta) a \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta = G(\theta) + C.$$

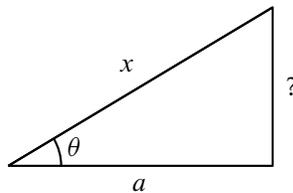
Para expresar este resultado en términos de la variable original x , debemos considerar que:

$$x = a \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{x}{a} \text{ \& } \theta = \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right); \quad \text{además}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la manera siguiente:

$$\sec \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

- Observación

Para calcular integrales de la forma $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, también puede ser aplicado el cambio de variable

$$x = a \csc \theta.$$

En este caso:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \csc^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\csc^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \cot^2 \theta} = a \cot \theta.$$

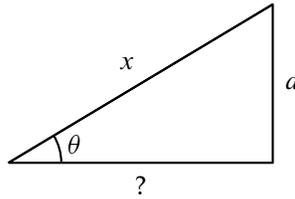
Además

$$dx = -\csc \theta \cdot \cot \theta \cdot d\theta.$$

El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a \sec \theta$.

En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la manera siguiente:

$$\csc \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Ejemplo 2.5.5 Calcular la integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$.

▼ Debido a que $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 2^2}$, se propone

$$x = 2 \sec \theta \Rightarrow dx = 2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{2^2 \sec^2 \theta - 2^2} = \sqrt{2^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{2^2 \tan^2 \theta} = 2 \tan \theta.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx &= \int \frac{2^3 \sec^3 \theta}{2 \tan \theta} (2 \sec \theta \cdot \tan \theta) d\theta = 2^3 \int \sec^4 \theta d\theta = 2^3 \int \sec^2 \theta \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta = \\ &= 8 \int (1 + \tan^2 \theta) \sec^2 \theta d\theta = 8 \int (1 + y^2) dy = \end{aligned}$$

Donde $y = \tan \theta$ & $dy = \sec^2 \theta d\theta$.

$$= 8 \left[y + \frac{1}{3} y^3 \right] + C = 8 \tan \theta + \frac{8}{3} \tan^3 \theta + C.$$

Pero: $\sqrt{x^2 - 4} = 2 \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 4}} dx &= 8 \tan \theta + \frac{8}{3} \tan^3 \theta + C = 8 \left[\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right] + \frac{8}{3} \left[\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right]^3 + C = \\ &= 4\sqrt{x^2 - 4} + \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 4)^3} + C. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5.6 Calcular la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

▼ Si se propone:

$$x = a \sec \theta \Rightarrow dx = a \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2 (\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = a \tan \theta.$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot d\theta}{a \tan \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1.$$

Sin embargo:

$$x = a \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C_1 = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C_1 = \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln |a| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C. \end{aligned}$$

En particular:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.$$

□

• Observación

Los cambios de variable aplicados para eliminar a los radicales $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ & $\sqrt{x^2 - a^2}$, pueden ser utilizados también para calcular integrales en cuyos integrandos no se tengan explícitamente dichos radicales, sino solamente los binomios de los radicandos.

Ejemplo 2.5.7 Calcular la integral $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

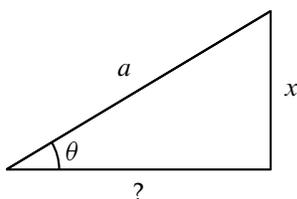
▼

$$x = a \sin \theta \Rightarrow dx = a \cos \theta d\theta.$$

Luego

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} = \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} = \frac{a}{a^2} \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{a} \int \sec \theta d\theta = \frac{1}{a} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C. \end{aligned}$$

$$x = a \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Usando el teorema de Pitagóras, $? = \sqrt{a^2 - x^2}$. Además:

$$\sec \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \& \quad \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{a} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right| + C = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{(a + x)}{\sqrt{a - x} \sqrt{a + x}} \right| + C = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}} \right| + C = \frac{1}{a} \ln \left| \left(\frac{a + x}{a - x} \right)^{\frac{1}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right|^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} \right) \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C. \end{aligned}$$

Esto es:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$$

□

Ejemplo 2.5.8 Calcular la integral $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

▼

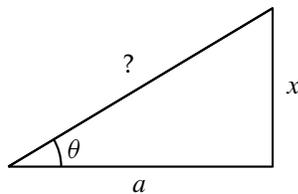
$$x = a \tan \theta \Rightarrow dx = a \sec^2 \theta d\theta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{(a^2 \tan^2 \theta + a^2)^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{[a^2 (\tan^2 \theta + 1)]^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^4 (\sec^2 \theta)^2} d\theta = \\ &= \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{a^3} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2a^3} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right] + C = \frac{1}{2a^3} \left[\theta + \frac{1}{2} (2 \sin \theta \cdot \cos \theta) \right] + C = \\ &= \frac{1}{2a^3} [\theta + \sin \theta \cdot \cos \theta] + C. \end{aligned}$$

Ahora:

$$x = a \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Por el teorema de Pitagóras, $? = \sqrt{x^2 + a^2}$. Además, $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ & $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Así también:

$$\tan \theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \arctan \left(\frac{x}{a} \right).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{2a^3} [\theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta] + C = \frac{1}{2a^3} \left[\arctan \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] + C = \\ &= \frac{1}{2a^3} \left[\arctan \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{ax}{x^2 + a^2} \right] + C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.5.9 Demostrar que $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4}$.

▼ Ya que

$$x = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = r \cos \theta d\theta \ \& \ \sqrt{r^2 - x^2} = r \cos \theta.$$

Además,

$$x = 0 \Rightarrow r \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \ \& \ x = r \Rightarrow r \operatorname{sen} \theta = r \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta) r \cos \theta d\theta = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 0 \right) \right] = \\ &= \frac{r^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0 \right] = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi r^2}{4}.\end{aligned}$$

Esto es:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4}.$$

□

Ejercicios 2.5.1 Sustitución trigonométrica. *Soluciones en la página 12*

Aplicar la técnica de sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales indefinidas y derivar para verificar cada resultado.

1. $\int x^3 \sqrt{1 - x^2} dx;$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^4} dx;$

13. $\int \sqrt{4 - x^2} dx;$

2. $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx;$

8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx;$

14. $\int \sqrt{x^2 - 4} dx;$

3. $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx;$

9. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 4}};$

15. $\int \sqrt{4 + x^2} dx;$

4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}} dx;$

10. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx;$

16. $\int \frac{dx}{x^2 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}};$

5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} dx;$

11. $\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^3} dx;$

17. $\int \frac{dx}{x (x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}};$

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}} dx;$

12. $\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$

18. $\int \frac{x^2}{(9 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

Ejercicios 2.5.1 *Sustitución trigonométrica. Preguntas: página 11*

1. $-\frac{1}{15}(3x^2 + 2)\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$

2. $\frac{1}{15}(3x^2 - 2)\sqrt{(x^2 + 1)^3} + C.$

3. $\frac{1}{15}(3x^2 + 2)\sqrt{(x^2 - 1)^3} + C.$

4. $-\frac{1}{3}(x^2 + 18)\sqrt{9-x^2} + C.$

5. $\frac{1}{3}(x^2 + 18)\sqrt{x^2-9} + C.$

6. $\frac{1}{3}(x^2 - 18)\sqrt{9+x^2} + C.$

7. $-\frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{12x^3} + C.$

8. $2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$

9. $\frac{x^2+2}{8x^3}\sqrt{x^2-4} + C.$

10. $\frac{-1}{3a^2x^3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C.$

11. $\frac{1}{2a}\left[-\frac{a}{x^2}\sqrt{a^2+x^2} + \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right)\right] + C.$

12. $\frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{8}x(a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + C.$

13. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$

14. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2-4}) + C.$

15. $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2} + 2\ln(\sqrt{4+x^2} + x) + C.$

16. $\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}} + C.$

17. $-\frac{1}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2-4}} + \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C.$

18. $\ln(\sqrt{9+x^2} + x) - \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$